CHAPITRE 12 LA MUSIQUE OU L'ART DE FAIRE ENTENDRE LES NOMBRES

INTRODUCTION : CHOIX PÉDAGOGIQUES

Le chapitre 12 s'inscrit dans le Thème 4 du programme : Son et musique, porteurs d'information. Le but de ce chapitre est de comprendre comment des rapports de nombres (intervalles) permettent de créer un ensemble de notes fini (gamme musicale) pour écrire de la musique. Plus spécifiquement, ce chapitre est plutôt tourné vers les mathématiques, et permet d'engager l'élève sur des calculs de fractions rationnelles, de puissances et de racines irrationnelles à travers l'exemple concret de la musique.

Ce chapitre se découpe en 3 unités.

L'unité 1 permet d'abord de définir ce que doit être un intervalle musical en termes de rapport (et non différence) de fréquences fondamentales. Puis, on met en évidence l'apparition de certaines fréquences harmoniques communes dans deux notes consonantes, et la notion d'intervalle consonant ou dissonant au regard de la « simplicité » de la fraction associée à l'intervalle.

L'unité 2 montre comment on peut construire un ensemble fini de notes, une gamme, en s'appuyant sur des sauts successifs d'intervalles consonants (quintes). C'est historiquement l'approche pythagoricienne, qui fut employée jusque dans la Renaissance. Cette unité est l'occasion de pratiquer des calculs de fractions et de puissances.

L'unité 3 permet de comprendre les limitations qu'imposaient les gammes pythagoriciennes en termes de liberté d'écriture *versus* accordage des instruments (problèmes de modulations et de transpositions musicales) : en effet, à cause de la « quinte du loup » sur l'instrument, toutes les gammes ne se valaient pas (elles avaient des « tempéraments » différents). Pour supprimer ce problème, on a fait appel aux nombres irrationnels, et créé la gamme tempérée, encore utilisée aujourd'hui. Cette unité est l'occasion de manipuler des nombres irrationnels et des racines.

POUR COMMENCER

1. → **a.**
2. → **b.**
3. → **b.**
4. → **a.**

UNITÉ 1

Activité guidée

1. Dans les deux jingles, l'intervalle entre les deux premières notes est le même : une quinte (Do-Sol = 5 notes, et Mi-Si = 5 notes). D'ailleurs, notre oreille reconnaît bien le même intervalle, simplement joué plus haut dans le 2^e^ jingle. Calculons la différence et le rapport des fréquences fondamentales (arrondis au dixième) dans les 2 cas :

	Élément	Rapport
Do-Sol $f(\text{Do}) = 262$ Hz ; $f(\text{Sol}) = 392$ Hz	$f(\text{Sol}) - f(\text{Do}) = 392 - 262 = 130$ Hz	$\frac{f(\text{Sol})}{f(\text{Do})} = \frac{392}{262} = 1{,}5$
Mi-Si $f(\text{Mi}) = 330$ Hz; $f(\text{Si}) = 494$ Hz	$f(\text{Si}) - f(\text{Mi}) = 494 - 330 = 164$ Hz	$\frac{f(\text{Si})}{f(\text{Mi})} = \frac{494}{330} = 1{,}5$

Ainsi, l'oreille est sensible au rapport des fréquences, et non à la différence. Un intervalle est ainsi défini par un même rapport entre les fréquences fondamentales de deux notes.
Remarque : Ceci est contre-intuitif pour beaucoup d'élèves, car ils ont tendance à faire le lien entre la notion d'intervalle et la notion de distance parcourue (on dit facilement : « Dans une quinte, on parcourt/couvre 5 notes », par exemple).

2. Do^4-Do^3 : 523/262 = 2,0
Ré^4-Ré^3 : 587/294 = 2,0
Mi^4-Mi^3 = 659/330 = 2,0
Ainsi, le rapport qui définit l'intervalle d'une octave est égal à 2. On l'écrit souvent 2/1 (ou bien 1/2 si les fréquences sont inversées dans le calcul).

3. Dans l'ordre : dissonant, consonant, dissonant, consonant.
Pour information, il s'agit dans l'ordre de : une seconde, une quinte, une septième, une octave.

4. Comparaison de l'octave Do^1-Do^2 : La fréquence fondamentale du Do^2 est en fait la 1^re^ harmonique du Do^1. De plus, toutes les harmoniques du Do^2 sont aussi des harmoniques du Do^1. Tout se passe comme si le Do^2 était une sous-partie du Do^1.
Comparaison de la quinte Do^1-Sol^1 : Certaines harmoniques du Sol^1 sont aussi des harmoniques du Do^1 : Sol^2-Sol^3-Ré^4. En fait, Sol^1 partage 1 harmonique sur 2 avec Do^1.
L'octave est très consonante car la fréquence fondamentale et toutes les harmoniques de la note aiguë sont aussi des harmoniques de la note grave. La quinte est consonante car la moitié des harmoniques de la note aiguë sont aussi des harmoniques de la note grave.
Remarque : cela s'explique car les harmoniques sont des multiples de la fondamentale pour chaque note dans l'intervalle. Or, si le rapport d'intervalle est « simple » (2/1 pour l'octave, ou 3/2 pour la quinte), alors on montre facilement que certains multiples de la fondamentale de la note 1 seront également multiples de la fondamentale de la note 2, ce qui est agréable à l'oreille en général.

5. Octave : 2/1 Quinte : 3/2
Ces rapports comportent des chiffres bien plus petits que les rapports d'intervalles dissonants comme la seconde (9/8), la septième (15/8) ou le triton (45/32).

UNITÉ 2

Activité guidée

1. Les pythagoriciens vont s'appuyer sur les deux rapports les plus simples et qui sonnent bien à l'oreille, définissant ainsi la note à l'octave (2/1) et la note à la quinte (3/2). Ceci est conforme à leur idée que les nombres sont partout et doivent définir ce qui est harmonieux.
Remarque : Avec la formule de la fréquence d'une corde tendue donnée Doc 2, p. 180 : , on retrouve bien les rapports d'octave et de quinte conformément aux longueurs relatives L/2 et 2L/3 présentées sur le monocorde Doc 1, p. 194.

2. D'après l'échelle des quintes, pour aller du Do au Mi, il faut sauter 4 quintes, soit multiplier successivement 4 fois la fréquence de Do par (3/2). Ainsi, sur l'échelle des quintes :
$f(\text{Mi}) = f(\text{Do}) \times (3/2)^4 = 523 \times (1{,}5)^4 = 2\,647{,}7$ Hz au dixième.
De même pour Sol# qui est distant de 8 quintes du Do de départ :
$f(\text{Sol\#}) = f(\text{Do}) \times (3/2)^8 = 523 \times (1{,}5)^8 = 13\,404$ Hz.

3. Le Mi est dans la 3^{e} octave au-dessus du Do, donc il faut le redescendre de 2 octaves pour le ramener dans la gamme du Do, soit diviser sa fréquence par 2, puis encore par 2, et il vient la fréquence du Mi dans la gamme du Do :
$f_o(\text{Mi}) = f(\text{Mi})/2^2 = f(\text{Do}) \times 3^4/2^6 = 2647{,}7/4 = 662$ Hz.
De même, pour le Sol#, il faut le redescendre de 4 octaves, d'où :
$f_o(\text{Sol\#}) = f(\text{Sol\#})/2^4 = f(\text{Do}) \times 3^8/2^{12} = 838$ Hz.

4. On obtient le tableau suivant pour f(Do) = 523 Hz :

Note	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#
Rapport	1	1,07	1,13	1,20	1.27	1,35	1,43
Fréquence (Hz)	523	559,6	591	627,6	664,2	706	747,9

Note	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do
Rapport	1,50	1,60	1,69	1,80	1,90	2,03
Fréquence (Hz)	784,5	836,8	883,9	941,4	993,7	1 061,7

5. Le comma est le tout petit intervalle qui sépare le Do à l'octave calculé par le cycle des quintes du Do à l'octave calculé par le rapport d'octave (2/1).
Fréquence du Do à l'octave par le cycle des quintes :
$f_q(\text{Do oct}) = f(\text{Do}) \times 3^{12}/2^{18}$ (voir doc 3).
Fréquence du Do à l'octave par le rapport d'octave :
$f_o(\text{Do oct}) = f(\text{Do}) \times 2$.
D'où la valeur du comma pythagoricien :
$f_q(\text{Do oct})/f_o(\text{Do oct}) = 3^{12}/2^{19} = 1{,}014$.

6. Gamme chromatique : voir question 4.
Gamme diatonique : Do-Ré-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do.
Gamme pentatonique : Do-Ré-Mi-Sol-La-Do.

UNITÉ 3

Activité guidée

1. La construction pythagoricienne des gammes permettait un accord consonant juste, idéal, parfait en octave, quarte et quinte. C'est d'ailleurs sur ces intervalles que la musique religieuse du Moyen Âge est construite, évitant ainsi les dissonances naturelles (le triton par exemple), et aussi la quinte du loup (artefact artificiel introduit par la nécessité de boucler le cycle des quintes pour fermer la gamme). Mais les compositeurs ont voulu plus de libertés pour circuler d'une gamme à l'autre sans changer la couleur, le tempérament de la musique, ce que ne permet pas la quinte du loup, car elle se positionne différemment dans une gamme ou dans l'autre et rend ainsi certaines gammes plus sombres, plus agressives voire moins jolies que d'autres de façon artificielle. Pour supprimer la quinte du loup, on est passé à la gamme tempérée : toutes les notes successives sont espacées du même petit intervalle, et toutes les gammes se valent ainsi, mais c'est au prix de la justesse : chaque intervalle est légèrement faux, car on n'est plus exactement sur les rapports rationnels idéaux pour la superposition des harmoniques et une consonance parfaite.

2. Si le cycle des quintes était fini, il existerait un nombre n de quintes successives qui donnerait la même note qu'un nombre p d'octaves successives (voir l'échelle des quintes, doc 2 p. 194). On aurait alors, en partant de note de fréquence f_o :
$$f_o \times (3/2)^n = f_o \times (2)^p,$$
soit en simplifiant par f_o : $(3/2)^n = 2^p$. On peut réécrire cela sans fraction : $3^n = 2^{n+p}$.
Cette égalité est impossible : 2^{n+p} est évidemment un nombre pair comme multiple de 2. Or, 3^n est forcément un nombre impair (car il ne contient pas de facteur 2, ni pair, dans son écriture sous forme de produit). On aboutit à un résultat faux, donc c'est que l'hypothèse de départ était fausse : le cycle des quintes n'est pas fini, il est infini.

3. Soit f la fréquence du Do grave. Pour passer de Do à Do#, il faut multiplier f par r. Donc on obtient $f \times r$ pour la fréquence de Do#. Pour passer de Do# à Ré, il faut multiplier $f \cdot r$ par r. Donc on obtient $f \cdot r^2$ pour la fréquence de Ré. Et ainsi de suite…
De proche en proche, on voit que pour passer de Do à l'octave de Do, il faut multiplier 12 fois par r. D'où la fréquence de l'octave de Do calculée par construction de la gamme tempérée : $f \times r^{12}$. Mais l'octave de Do doit aussi avoir la fréquence $f \times 2$, par construction du rapport d'octave.
Ainsi, on veut avoir : $f \times r^{12} = f \times 2$, et en simplifiant par f :
$r^{12} = 2$, soit $r = 2^{1/12}$.
On montre que r est irrationnel par l'absurde, comme pour $\sqrt{2}$.
Supposons que $r = 2^{1/12}$ est rationnel. On peut donc l'écrire sous forme d'une fraction irréductible : $2^{1/12} = \frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers premiers entre eux. Alors : $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{12} = \frac{a^{12}}{b^{12}}$.
Donc, nécessairement :
$b^{12} \times 2 = a^{12}$. Donc a^{12} est pair, puisqu'il est multiple de 2. Et donc a est pair (car on ne peut pas faire un nombre pair en multipliant des nombres impairs). On peut donc écrire $a = 2 \times p$, où p est un nouvel entier. En remettant cette expression de a dans l'équation précédente, il vient :
$b^{12} \times 2 = (2 \times p)^{12}$, soit : $b^{12} \times 2 = 2^{12} \times p^{12}$. En simplifiant par 2 : $b^{12} = 2^{11} \times p^{12}$. Ainsi donc, b est pair (multiple de 2), tout comme a.

Ceci contredit l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux. Donc $2^{1/12}$ ne peut pas être écrit comme une fraction rationnelle : c'est un nombre irrationnel.

4. Pour l'intervalle de seconde, on doit couvrir 2 fois l'intervalle r (ex : seconde Do-Ré), d'où un rapport r^2 (voir question 3). De même pour les autres intervalles, il suffit de compter combien de fois il faut sauter de r (voir question 3).

5. On obtient en arrondissant au millième :

Nom de l'intervalle	Rapport Pythagore	Rapport tempéré
Seconde	1,125	1,122
Tierce	1,25	1,260
Quarte	1,333	1,335
Quinte	1,5	1,498
Sixte	1,6	1,682
Septième	1,875	1,888
Octave	2	2

Tous les intervalles sont légèrement faux dans la gamme tempérée (surtout la tierce, la sixte et la septième). Cela dit, les intervalles de la gamme tempérée restent très proches de l'idéalité des rapports rationnels pythagoriciens (qui garantissent le recouvrement de certaines harmoniques dans les intervalles consonants).

Tester ses savoirs

1 Vrai/Faux

a. Faux, pour caractériser un intervalle, il faut calculer le rapport entre les fréquences fondamentales des deux notes.
b. Vrai.
c. Faux, une quinte est caractérisée par le rapport 3/2.
d. Vrai.
e. Faux, une gamme tempérée reboucle parfaitement sur l'octave mais ne respecte pas exactement la justesse des intervalles.

2 QCM

1. a. Faux, ces deux notes forment une quinte car leurs fréquences fondamentales sont dans un rapport 3/2 $\left(\frac{f_1}{f_0} \approx \frac{3}{2}\right)$.
b. Vrai.
c. Faux.
d. Faux.

2. a. Faux.
b. Vrai.
c. Faux.
d. Faux.
3. a. Faux, si on multiplie f_0 par 3/2, on monte d'une quinte à partir de f_0.
b. Faux, dans une gamme naturelle, pour descendre d'une quinte à partir de la fréquence f_0, on doit multiplier f_0 par 2/3.
c. Faux.
d. Vrai.
4. a. Faux, la fréquence fondamentale de Mi est $f_0 \cdot 2^{4/12}$ car il y a quatre intervalles $r = 2^{1/12}$ entre Do et Mi.
b. Faux.
c. Vrai.
d. Faux.

5. a. Faux, « comma » n'est pas un nouvel intervalle, mais le raccourcissement de la dernière quinte de la gamme.
b. Faux, la quinte du loup est raccourcie par rapport aux autres quintes dites pures.
c. Faux, la quinte fa-do est raccourcie par rapport à la quinte la-mi.
d. Vrai.
6. a. Faux, dans la gamme tempérée, tous les intervalles sont légèrement faux sauf l'octave.
b. Faux.
c. Faux.
d. Vrai.

3 Question de synthèse

Jusqu'au XVII^e siècle, les musiciens ont utilisé la gamme chromatique, ou de Pythagore, pour accorder les instruments et composer la musique. La construction de cette gamme est basée sur l'utilisation de deux intervalles consonants : l'octave et la quinte, de rapports respectivement 2/1 et 3/2. Cette construction, basée sur les nombres rationnels, permet de garantir des intervalles consonants parfaitement justes (octaves, quartes, quintes), mais se heurte à un problème : en sautant de quinte en quinte, on ne retombe jamais exactement sur un nombre entier d'octaves. Autrement dit, on doit arbitrairement choisir de légèrement tronquer (ou augmenter) la fréquence de la dernière note obtenue par les quintes pour la faire tomber exactement sur l'octave de la note de départ de la gamme et ainsi obtenir une gamme avec un nombre fini de notes et refermer le cycle des quintes sur lui-même. Ce faisant, on crée un dernier intervalle qui sonne faux : c'est la quinte du loup, qui était présente sur les instruments et rendait artificiellement inégales les différentes gammes, donc compliquait les transpositions de morceaux et la composition musicale en général.
C'est pour cela qu'on a évolué vers la gamme tempérée, qui partage l'octave en 12 intervalles identiques – les demi-tons. Mais pour ce faire, il a fallu accepter que ce petit intervalle ait un rapport irrationnel. Ainsi, toutes les gammes se valent, mais les intervalles sont très légèrement faux : ils ne correspondent plus exactement à des fractions.

Objectif BAC

4

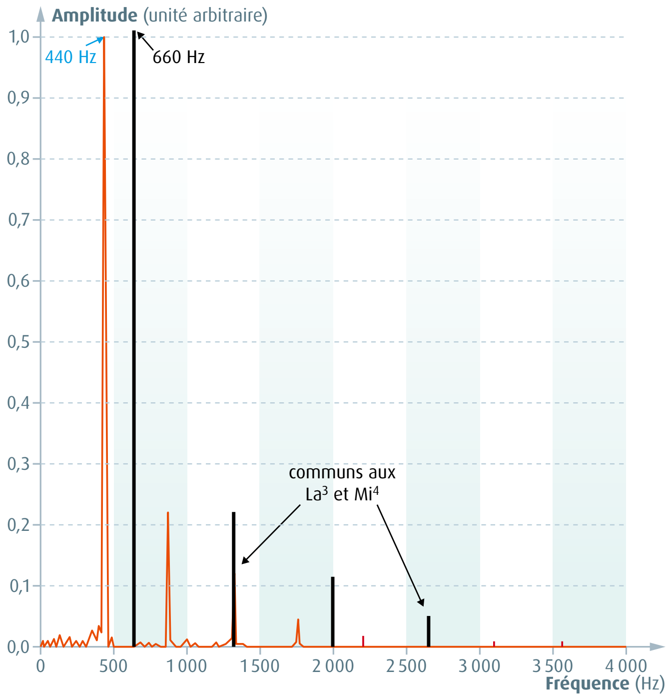
1. $f_5 = f_0 \times (3/2)$
2. $f_{4-5} = f_5 \times (4/3) = f_0 \times (3/2) \times (4/3) = f_0 \times 2$
3. La fréquence de la quarte de la quinte d'une note donnée est le double de la fréquence de la note donnée au départ, c'est-à-dire l'octave. Autrement dit, on peut diviser une octave en une quinte et une quarte.
4. $f_3 = f_0 \times (6/5)$
$f_{6-3} = f_3 \times (5/3) = f_0 \times (6/5) \times (5/3) = f_0 \times 2$, même type de conclusion.

5

1. Les 5 premières harmoniques sont les 5 premiers multiples de la fréquence fondamentale, soit, en Hz:
880, 1 320, 1 760, 2 200, 2 640

2. Pour aller de La^3 à Mi^4, il faut parcourir 5 notes, donc l'intervalle La^3-Mi^4 est une quinte. D'où la fréquence du Mi^4:
$f(Mi^4) = f(La^3) \times (3/2) = 440 \times (3/2) = 660$ Hz.
Ainsi, les 3 premières harmoniques du Mi^4 sont les premiers multiples de 660 Hz, soit en Hz:
1 320, 1 980, 2 640

3. Voir en noir sur le spectre ci-dessous:



On remarque que le La^3 et le Mi^4 ont des harmoniques en commun, à 1 320 Hz et à 2 640 Hz. En fait, une harmonique sur deux du Mi^4 est aussi une harmonique du La^3.

Remarque: Les amplitudes relatives du Mi^4 sont tracées ainsi par rapport à celles du La^3 pour respecter le timbre de l'instrument. En particulier, beaucoup d'élèves vont tracer l'harmonique du Mi^4 à 1 320 Hz avec la même amplitude que celle du La^3 à 1 320 Hz, au lieu de la faire avec l'amplitude de la 1^{re} harmonique du La^3 à 880 Hz...

4. L'intervalle formé par ces deux notes est consonant, car une partie du Mi^4 se fond dans le La^3, ce qui est confortable pour l'oreille: ces deux notes se ressemblent en quelque sorte.

6

1. Il faut monter de 11 quintes.

2. Il faut redescendre de 6 octaves pour retomber dans la gamme.

3. Donc:

$$f = f_0 \times (3/2)^{11}/2^6 = f_0 \times 3^{11}/(2^{11} \times 2^6) = f_0 \times (3^{11}/2^{11+6})$$
$$= f_0 \times (3^{11}/2^{17}) = 347{,}6 \times (3^{11}/2^{17}) = 469{,}8 \text{ Hz.}$$

7

1. 7 demi-tons.

2. $r = 2^{1/12}$, et on multiplie par r pour monter d'un demi-ton.
Pour aller de Do à Sol, on monte de 7 demi-tons donc:
$f = f_0 \times r^7 = f_0 \times (2^{1/12})^7 = f_0 \times 2^{(1/12)7} = f_0 \times 2^{7/12} = 392$ Hz.

3. Do-Sol est une quinte juste, donc le rapport des fréquences fondamentales devrait être $(3/2) = 1{,}5$.
Or, il n'est que $(2^{7/12}) = 1{,}498$, légèrement inférieur à 1,5. Dans la gamme tempérée, touts les demi-tons se valent, et donc n'importe quel intervalle aura le même rapport où qu'il soit joué sur la gamme. Mais ce rapport ne sera pas rationnel en général (sauf pour l'octave, car *r* est irrationnel), et donc chaque intervalle est très légèrement faux.

ÇA VOUS CONCERNE

– L'emploi des dissonances

Consonance, dissonance: ce n'est pas si simple...
Dans la musique moderne, les dissonances sont aussi utilisées que les consonances, car la dynamique musicale repose largement sur l'enchaînement entre une tension, puis sa résolution. Les dissonances créent de la tension, et elles demandent une résolution consonante, que le compositeur apporte – ou pas, selon l'effet désiré. On a même donné un nom à ce genre d'enchaînement qui ponctue la phrase musicale: une cadence. Mais la notion même de dissonance est arbitraire... Voici deux courtes vidéos pour mieux comprendre:

- « D comme dissonance », J-F Zygel: https://www.youtube.com/watch?v=I_f664RMQus
- « C comme cadence », J-F Zygel: https://www.youtube.com/watch?v=49E9Vb2R8bQ

Chez Wagner, on note l'usage de dissonances non résolues notamment dans son opéra Tristan et Isolde. Voici une courte vidéo en anglais pour comprendre ce qu'on appelle « l'accord de Tristan »:

- « Tristan chord », Stephen Fry: https://www.youtube.com/watch?v=dWLp7lBomW8

Chez Charles Ives, l'usage des quarts de tons (la moitié d'un demi-ton, donc des nouvelles notes...) crée des dissonances nouvelles:

- « Allegro en quarts de tons pour deux pianos », Charles Ives: https://www.youtube.com/watch?v=5ZExi38G9AE

Dans le jazz, on utilise volontiers des accords enrichis de 7^e, 9^e, 11^e, etc. Ils comportent plus de 3 notes en général.
Voici un guide pour les dissonances en jazz:
http://www.thejazzpianosite.com/jazz-piano-lessons/jazz-chords/available-tensions/

– Le mode d'une musique

Qu'est-ce qui fait qu'on reconnaît facilement une musique japonaise, arabe, indienne, africaine, chinoise, etc? D'abord, il y a les instruments, bien-sûr, mais pas seulement: le choix des gammes compte énormément aussi! Pour faire la différence on parle de mode, au lieu de gamme pour ces musiques. Les modes classiques sont connus depuis la Grèce antique. Dans la musique orientale, on utilise des modes spécifiques appelées « maqams » qui font intervenir des intervalles plus petits (1/4 de ton) que dans la musique occidentale, et donc des nouvelles notes. La musique japonaise est basée sur des modes à 5 notes, de même qu'en Chine – mais pas avec les mêmes 5 notes... Ainsi, chaque culture a créé ses propres codes musicaux: il n'y a pas une seule musique, mais bien une multitude d'univers musicaux différents – autant que de cultures...
Dans la musique classique occidentale, les modes sont utilisés dans le chant grégorien depuis le début du Moyen-Âge. Ils sont abandonnés au profit des gammes majeures et mineures avec l'avènement de la musique baroque, puis sont remis à l'honneur au XX^e siècle par des compositeurs comme Debussy, Bartok ou encore Messiaen.

- Gammes orientales et quarts de tons: https://www.youtube.com/watch?v=1WvYsM8qx-4&t=207s
- La musique au Japon – des instruments et chants traditionnels à la J-pop: https://www.youtube.com/watch?v=fYeBLqGkAss